МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

"БЕЛГОРОДСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ им. В.Я. ГОРИНА"

УДК 517.983.33+517.984.51
№ госрегистрации
Инв. №

УТВЕРЖДАЮ

Ректор БелГСХА им. В.Я. Горина

А.В. Турьянский

ОТЧЁТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

по теме:

"КРИТЕРИЙ ВПОЛНЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ МАТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ НЕВАНЛИННЫ-ПИКА "

Начальник НИЧ А.Н. Ивченко

Руководитель темы Ю.М. Дюкарев

Майский, 2013

Список исполнителей

Руководитель темы, доктор физико-математических

наук, профессор ____________________ Ю.М. Дюкарев

подпись, дата

Нормоконтролёр ______________________

§ 1. Введение и постановка задачи

Пусть даны целые числа $m, n \geqslant 1$. Множество m-мерных комплексных столбцов $x = \operatorname{col}\big(x_1, x_2, \ldots, x_m\big)$ со стандартной структурой линейного пространства над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ и скалярным произведением $(x, y) = \sum_{j=1}^{m} \bar{x}_i y_j$ обозначим через $\mathbb{C}^m$. Через $\mathbb{C}^{m\times n}$ обозначим множество комплексных матриц с m строками и n столбцами. Пусть $\mathbb{C}_H^{m\times m} = \big\{A \in \mathbb{C}^{m\times m} : (Ax, y) = (x, Ay), \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^m\big\}$ обозначает множество эрмитовых матриц. Эрмитова матрица $A \in \mathbb{C}_H^{m\times m}$ называется неотрицательной, если $(x, Ax) \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{C}^m$. Через $\mathbb{C}_\geqslant^{m\times m}$ обозначим множество неотрицательных матриц m-го порядка. Неотрицательная матрица $A \in \mathbb{C}_\geqslant^{m\times m}$ называется положительной, если $(x, Ax) > 0$ для всех ненулевых векторов $x \in \mathbb{C}^m$. Через $\mathbb{C}_>^{m\times m}$ обозначим множество положительных матриц m-го порядка. Для матриц $A, B \in \mathbb{C}_H^{m\times m}$ запись $A \geqslant B$ (соотв. $A > B$) будет обозначать, что $A - B \in \mathbb{C}_\geqslant^{m\times m}$ (соотв. $A - B \in \mathbb{C}_>^{m\times m}$). Единичную матрицу m-го порядка обозначим через I_m, а нулевую матрицу с m строками и n столбцами обозначим через $O_{m\times n}$. Для упрощения записи мы часто будем опускать индексы у матриц I_m и $O_{m\times n}$, если эти индексы легко определяются из контекста. Если $f(z)$ некоторая матрица-функция (МФ), то запись $f^*(z)$ будет обозначать сокращение для записи $\big(f(z)\big)^*$. Для верхней полуплоскости введем обозначение $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.

Голоморфная МФ $w : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}^{m\times m}$ называется неванлинновской, если

$$\frac{w(z) - w^*(z)}{2\,i} \geqslant O, \quad \forall z \in \mathbb{C}_+.$$

Класс неванлинновских МФ фиксированного порядка $m \geqslant 1$ обозначим через $\mathcal{R}_m$.

В задаче Неванлинны-Пика по последовательности узлов интерполяции

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots \subset \mathbb{C}_+,\ z_j \neq z_k,\ j \neq k$$

и последовательности интерполируемых значений

$$w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots \subset \mathbb{C}^{m\times m}$$

требуется описать все неванлинновские МФ $w \in \mathcal{R}_m$ такие,что

$$w(z_j) = w_j, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Через $\mathcal{F}_\infty$ обозначим множество всех решений задачи (1.1).

Наряду с (1.1), мы будем рассматривать и усеченные задачи Неванлинны-Пика

$$w(z_j) = w_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{1.2}$$

Через $\mathcal{F}_n$ обозначим множество решений задачи (1.2). Отметим, что $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ и $\mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}_n$.

С усеченной задачей Неванлинны-Пика свяжем следующие блочные матрицы

$$T_n = \begin{pmatrix} z_1^{-1} I & & \\ & \ddots & \\ & & z_n^{-1} I \end{pmatrix}, \; K_n = T_n^{-1} \begin{pmatrix} \frac{w_1 - w_1^*}{z_1 - \bar{z}_1} & \cdots & \frac{w_1 - w_n^*}{z_1 - \bar{z}_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n - w_1^*}{z_n - \bar{z}_1} & \cdots & \frac{w_n - w_n^*}{z_n - \bar{z}_n} \end{pmatrix} T_n^{-1^*},$$

$$u_n = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, \; v_n = \begin{pmatrix} I \\ \vdots \\ I \end{pmatrix}, \; R_{T_n}(z) = (I - zT_n)^{-1}. \tag{1.3}$$

Легко видеть, что выполненно основное тождество

$$T_n K_n - K_n T_n^* = v_n u_n^* - u_n v_n^*. \tag{1.4}$$

Мы будем рассматривать тот случай, когда все усеченные задачи (1.2) являются вполне неопределенными

$$K_n > O_{nm \times nm}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В этом случае множество $\mathcal{F}_n \neq \varnothing$ и множество $\mathcal{F}_\infty \neq \varnothing$ (см. [1], [2]). Приведем описание множества $\mathcal{F}_n$ в терминах дробно-линейных преобразований.

Резольветной матрицей для усеченной задачи (1.2) называется

$$U_n(z) = \begin{pmatrix} \alpha_n(z) & \beta_n(z) \\ \gamma_n(z) & \delta_n(z) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} I + z v_n^* R_{T_n^*}(z) K_n^{-1} u_n & -z v_n^* R_{T_n^*}(z) K_n^{-1} v_n \\ z u_n^* R_{T_n^*}(z) K_n^{-1} u_n & I - z u_n^* R_{T_n^*}(z) K_n^{-1} v_n \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Пара мероморфных в $\mathbb{C}_+$ МФ $\begin{pmatrix} p(z) \\ q(z) \end{pmatrix}$ называется неванлинновской, если

$$p(z)p^*(z) + g(z)g^*(z) > O, \quad (p^*(z) \; g^*(z)) \mathcal{J} \begin{pmatrix} p(z) \\ g(z) \end{pmatrix} \geqslant O.$$

Здесь $\mathcal{J} = \begin{pmatrix} O_m & -iI_m \\ iI_m & O_m \end{pmatrix}$. Мы будем пользоваться очевидными равенствами

$$\mathcal{J}^2 = I_{2m}, \; \mathcal{J}^* = \mathcal{J}.$$

Две неванлинновские пары $\binom{p_1(z)}{g_1(z)}$ и $\binom{p_2(z)}{g_2(z)}$ называются эквивалентными, если существует мероморфная и мероморфно обратимая в $\mathbb{C}_+$ МФ $Q(z)$ такая, что

$$\begin{pmatrix} p_1(z) \\ g_1(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_2(z) \\ g_2(z) \end{pmatrix} Q(z).$$

Классы эквивалентности неванлинновских МФ обозначим через $\overline{\mathcal{R}}_m$.

Теорема 1. *Формула*

$$w(z) = (\gamma_n(z)p(z) + \delta_n(z)q(z)) \cdot (\alpha(z)p(z) + \beta(z)q(z))^{-1}$$

устанавливает биективное соответствие между $\mathcal{F}_n$ *и* $\overline{\mathcal{R}}_m$.

Доказательство теоремы 1 имеется в [1], [2].

Сформулируем некоторые известные результаты по теории матричных кругов Вейля, необходимые для дальнейшего исследования задачи Неванлинны-Пика. Зафиксируем точку

$$z_0 \in \mathbb{C}_+ \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots\}$$

и рассмотрим множество матриц

$$\mathcal{K}_n(z_0) = \{w(z_0) : w \in \mathcal{F}_n\}.$$

Теорема 2. *Множество* $\mathcal{K}_n(z_0)$ *допускает представление вида*

$$\mathcal{K}_n(z_0) = \{c_n(z_0) + r_n(z_0)V\rho_n(z_0) : V^*V \leqslant I\}. \tag{1.6}$$

Здесь

$$\begin{gathered} c_n(z_0) = \big(i(\bar{z}_0 - z_0)v_n^* R_{T_n}^*(z_0) K_n^{-1} R_{T_n}(z_0) v_n\big)^{-1} \times \\ \times (i(\bar{z}_0 - z_0)u_n^* R_{T_n}^*(z_0) K_n^{-1} R_{T_n}(z_0) v_n - iI)^*, \\ r_n(z_0) = \big(i(\bar{z}_0 - z_0)v_n^* R_{T_n}^*(z_0) K_n^{-1} R_{T_n}(z_0) v_n\big)^{-1/2} > O, \\ \rho_n(z_0) = \big(i(\bar{z}_0 - z_0)v_n^* R_{T_n}^*(\bar{z}_0) K_n^{-1} R_{T_n}(\bar{z}_0) v_n\big)^{-1/2} > O. \end{gathered} \tag{1.7}$$

С геометрической точки зрения множество $\mathcal{K}_n(z_0)$ из (1.6) можно считать матричным кругом с центром в точке $c_n(z_0)$ левым радиусом $r_n(z_0)$ и правым радиусом $\rho_n(z_0)$. Этот круг называется матричным кругом Вейля.

Из включения $\mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}_n$ следует, что

$$\mathcal{K}_{n+1}(z_0) \subset \mathcal{K}_n(z_0)$$

Пусть

$$\mathcal{K}_\infty(z_0) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n(z_0).$$

Теорема 3. *При $n \to \infty$ существуют пределы*

$$c_\infty(z_0) = \lim_{n\to\infty} c_n(z_0), \quad \rho_\infty(z_0) = \lim_{n\to\infty} \rho_n(z_0) \geqslant O,$$

$$r_\infty(z_0) = \lim_{n\to\infty} r_n(z_0) \geqslant O.$$

Более того,

$$\mathcal{K}_\infty(z_0) =\{w(z_0) : w \in F_\infty\} = \{c_\infty(z_0) + r_\infty(z_0)V\rho_\infty(z_0) : V^*V \leqslant I\}$$

Доказательство теорем 2 и 3 имеется в [2], [3], [4].

Множество матриц $\mathcal{K}_\infty(z_0)$ называется предельным кругом Вейля в точке z_0. Из теоремы С. А. Орлова [5] следует, что ранги радиусов предельных кругов Вейля не зависят от выбора точки $z_0 \in \mathbb{C}_+ \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots\}$. Введем обозначение

$$m_+ = \operatorname{rank}\, r_\infty(z_0), \quad m_- = \operatorname{rank}\, \rho_\infty(z_0).$$

Ясно, что $0 \leqslant m_+,\, m_- \leqslant m$. Задача Неванлинны-Пика (1.1) называется вполне неопределенной, если

$$m_+ = m_- = m.$$

Основным результатом является критерий вполне неопределенности задачи (1.1).

§ 2. Мультипликативная структура резольвентной матрицы

Рассмотрим блочное разбиение матрицы K_j при $j > 1$

$$K_j = \begin{pmatrix} K_{j-1} & B_j \\ B_j^* & C_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ B_j^* K_{j-1}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{j-1} & O \\ O & \widehat{K}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & K_{j-1}^{-1} B_j \\ O & I \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Здесь

$$\widehat{K}_j = C_j - B_j^* K_{j-1}^{-1} B_j > O. \tag{2.2}$$

Рассмотрим аналогичные блочные разбиения матриц из (1.3)

$$T_j = \begin{pmatrix} T_{j-1} & O_{(j-1)m\times m} \\ O_{m\times(j-1)m} & z_j^{-1} I_m \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

$$R_{T_j}(z) = \begin{pmatrix} R_{T_{j-1}}(z) & O_{(j-1)m\times m} \\ O_{m\times(j-1)m} & (1 - z\, z_j^{-1})^{-1} I_m \end{pmatrix},$$

$$u_j = \begin{pmatrix} u_{j-1} \\ w_j \end{pmatrix}, \quad v_j = \begin{pmatrix} v_{j-1} \\ I_m \end{pmatrix}, \quad j > 1. \tag{2.4}$$

И пусть, далее,

$$\widehat{v}_j = -B_j^* K_{j-1}^{-1} v_{j-1} + I, \quad \widehat{u}_j = -B_j^* K_{j-1}^{-1} u_{j-1} + w_j, \quad j > 1. \tag{2.5}$$

Подставим блочные представления (2.1) и (2.4) в основное тождество (1.4). Воспользовавшись (2.5), получим индуцированные тождества ($j > 1$)

$$T_{j-1}K_{j-1} - K_{j-1}T_{j-1}^* = v_{j-1}u_{j-1}^* - u_{j-1}v_{j-1}^*, \tag{2.6}$$

$$K_{j-1}T_{j-1}^*K_{j-1}^*B_j - B_j\bar{z}_j^{-1}I_m = v_{j-1}\widehat{u}_j^* - u_{j-1}\widehat{v}_j^*, \tag{2.7}$$

$$z_j^{-1}I_m\widehat{K}_j - \widehat{K}_j\bar{z}_j^{-1}I_m = \widehat{v}_j\widehat{u}_j^* - \widehat{u}_j\widehat{v}_j^*. \tag{2.8}$$

Множителями Бляшке-Потапова называются МФ

$$b_j(z) = I + \frac{z}{1-\bar{z}_j^{-1}z}\begin{pmatrix} \widehat{v}_j^*\widehat{K}_j^{-1}\widehat{u}_j & -\widehat{v}_j^*\widehat{K}_j^{-1}\widehat{v}_j \\ \widehat{u}_j^*\widehat{K}_j^{-1}\widehat{u}_j & -\widehat{u}_j^*\widehat{K}_j^{-1}\widehat{v}_j \end{pmatrix}, \quad j \geqslant 1. \tag{2.9}$$

Здесь

$$\widehat{v}_1 = v_1, \quad \widehat{u}_1 = u_1, \quad \widehat{K}_1 = K_1. \tag{2.10}$$

Матрицы $(\widehat{v}_j,\ \widehat{u}_j)_{j=1}^\infty$, определенные формулами (2.5) и (2.10), называются параметрами Шура.

Теорема 4. *Резольвентная матрица $U_n(z)$ допускает представление в виде произведения множителей Бляшке-Потапова*

$$U_n(z) = b_1(z) \cdot b_2(z) \cdot \ldots \cdot b_n(z). \tag{2.11}$$

Доказательство теоремы получается непосредственными вычислениями с использованием индуцированных тождеств (2.6)-(2.8) (см. аналогичные вычисления в [6], [7]).

Теорема 5. *Пусть для всех $j \geqslant 1$ множители Бляшке-Потапова определены в (2.9). Тогда*

1) матрицы $\widehat{K}_j$ допускают представление

$$\widehat{K}_j = z_j \frac{\widehat{u}_j\widehat{v}_j^* - \widehat{v}_j\widehat{u}_j^*}{z_j - \bar{z}_j}\bar{z}_j > O \tag{2.12}$$

и при всех $j \geqslant 1$ матрицы $\widehat{u}_j$ и $\widehat{v}_j$ невырождены;

2) множители Бляшке-Потапова допускают представления

$$b_j(z) = I + \frac{(\bar{z}_j - z_j)z}{|z_j|^2(1-\bar{z}_j^{-1}z)}\mathcal{P}_j, \tag{2.13}$$

в которых матрицы $\mathcal{P}_j$ выражаются через параметры Шура по формулам

$$\mathcal{P}_j = \begin{pmatrix} \widehat{v}_j^{\,*} \\ \widehat{u}_j^{\,*} \end{pmatrix} \left(\frac{\widehat{u}_j \widehat{v}_j^{\,*} - \widehat{v}_j \widehat{u}_j^{\,*}}{i} \right)^{-1} (\widehat{v}_j,\ \widehat{u}_j)\mathcal{J} \tag{2.14}$$

и удовлетворяет условиям

$$\mathcal{P}_j^2 = -\mathcal{P}_j, \quad \mathcal{P}_j\mathcal{J} \geqslant O; \tag{2.15}$$

3) определители множителей Бляшке-Потапова вычисляются по формулам

$$\det b_j(z) = \left(\frac{\bar{z}_j}{z_j} \cdot \frac{z_j - z}{\bar{z}_j - z} \right)^m; \tag{2.16}$$

4) $\mathcal{J}$-формы множителей Бляшке-Потапова вычисляются по формулам

$$\mathcal{J} - b_j(z)\mathcal{J}b_j^*(z) = \left(\left| \frac{z - z_j}{z - \bar{z}_j} \right|^2 - 1 \right) \mathcal{P}_j\mathcal{J}; \tag{2.17}$$

5) для следов матриц $\mathcal{P}_j$ имеем

$$\operatorname{tr} \mathcal{P}_j = -m. \tag{2.18}$$

Доказательство. 1) Равенство и неравенство в (2.12) следуют из (2.8) и (2.2) соответственно. Теперь из (2.12) имеем $\operatorname{Im}(\widehat{u}_j \widehat{v}_j^{\,*}) = (\widehat{u}_j \widehat{v}_j^{\,*} - \widehat{v}_j \widehat{u}_j^{\,*})/(2i) > O$. Отсюда немедленно получаем невырожденность произведения $\widehat{u}_j \widehat{v}_j^{\,*}$ и, следовательно, невырожденность матриц $\widehat{u}_j$ и $\widehat{v}_j$.

2) Подставим (2.12) в (2.9). После очевидных преобразований получим (2.13). Далее имеем (см. (2.14))

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_j^2 = {} & \begin{pmatrix} \widehat{v}_j^{\,*} \\ \widehat{u}_j^{\,*} \end{pmatrix} \left(\frac{\widehat{u}_j \widehat{v}_j^{\,*} - \widehat{v}_j \widehat{u}_j^{\,*}}{i} \right)^{-1} (\widehat{v}_j,\ \widehat{u}_j)\mathcal{J} \begin{pmatrix} \widehat{v}_j^{\,*} \\ \widehat{u}_j^{\,*} \end{pmatrix} \\
& \times \left(\frac{\widehat{u}_j \widehat{v}_j^{\,*} - \widehat{v}_j \widehat{u}_j^{\,*}}{i} \right)^{-1} (\widehat{v}_j,\ \widehat{u}_j)\mathcal{J} \\
= {} & -\begin{pmatrix} \widehat{v}_j^{\,*} \\ \widehat{u}_j^{\,*} \end{pmatrix} \left(\frac{\widehat{u}_j \widehat{v}_j^{\,*} - \widehat{v}_j \widehat{u}_j^{\,*}}{i} \right)^{-1} \left(\frac{\widehat{u}_j \widehat{v}_j^{\,*} - \widehat{v}_j \widehat{u}_j^{\,*}}{i} \right) \\
& \times \left(\frac{\widehat{u}_j \widehat{v}_j^{\,*} - \widehat{v}_j \widehat{u}_j^{\,*}}{i} \right)^{-1} (\widehat{v}_j,\ \widehat{u}_j)\mathcal{J} = -\mathcal{P}_j.
\end{aligned}$$

И, наконец,

$$\mathcal{P}_j\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \widehat{v}_j^{\,*} \\ \widehat{u}_j^{\,*} \end{pmatrix} \left(\frac{\widehat{u}_j\widehat{v}_j^{\,*} - \widehat{v}_j\widehat{u}_j^{\,*}}{i} \right)^{-1} (\widehat{v}_j,\ \widehat{u}_j) \geqslant O.$$

3) Покажем, что матрицы

$$T = \begin{pmatrix} I & I \\ \widehat{v}_j^{\,-1}\widehat{u}_j & \widehat{u}_j^{\,*}\widehat{v}_j^{\,-1^*} \end{pmatrix},$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{v}_j^{\,*}(\widehat{v}_j\widehat{u}_j^{\,*} - \widehat{u}_j\widehat{v}_j^{\,*})^{-1}\widehat{v}_j\widehat{u}_j^{\,*}\widehat{v}_j^{\,-1^*} & -\widehat{v}_j^{\,*}(\widehat{v}_j\widehat{u}_j^{\,*} - \widehat{u}_j\widehat{v}_j^{\,*})^{-1}\widehat{v}_j \\ -\widehat{v}_j^{\,*}(\widehat{v}_j\widehat{u}_j^{\,*} - \widehat{u}_j\widehat{v}_j^{\,*})^{-1}\widehat{u}_j & \widehat{v}_j^{\,*}(\widehat{v}_j\widehat{u}_j^{\,*} - \widehat{u}_j\widehat{v}_j^{\,*})^{-1}\widehat{v}_j \end{pmatrix}$$

взаимно обратны. Пусть $T^{-1}T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Тогда

$$\begin{aligned} a_{11} &= \widehat{v}_j^{\,*}(\widehat{v}_j\widehat{u}_j^{\,*} - \widehat{u}_j\widehat{v}_j^{\,*})^{-1}\widehat{v}_j\widehat{u}_j^{\,*}\widehat{v}_j^{\,-1^*} - \widehat{v}_j^{\,*}(\widehat{v}_j\widehat{u}_j^{\,*} - \widehat{u}_j\widehat{v}_j^{\,*})^{-1}\widehat{v}_j\widehat{v}_j^{\,-1}\widehat{u}_j \\ &= \widehat{v}_j^{\,*}(\widehat{v}_j\widehat{u}_j^{\,*} - \widehat{u}_j\widehat{v}_j^{\,*})^{-1}(\widehat{v}_j\widehat{u}_j^{\,*} - \widehat{u}_j\widehat{v}_j^{\,*})\widehat{v}_j^{\,-1^*} = I. \end{aligned}$$

Аналогичным образом убеждаемся в том, что

$$a_{12} = O,\ a_{21} = O,\ a_{22} = I.$$

Теперь имеем

$$\begin{aligned} &T^{-1}b_j(z)T \\ &\quad = I + \frac{(\bar{z}_j - z_j)z}{|z_j|^2(1 - \bar{z}_j^{-1}z)} T^{-1} \begin{pmatrix} \widehat{v}_j^{\,*} \\ \widehat{u}_j^{\,*} \end{pmatrix} \left(\widehat{u}_j\widehat{v}_j^{\,*} - \widehat{v}_j\widehat{u}_j^{\,*} \right)^{-1} (-\widehat{u}_j,\ \widehat{v}_j,\ )T \\ &\quad = I + \frac{(\bar{z}_j - z_j)z}{|z_j|^2(1 - \bar{z}_j^{-1}z)} \begin{pmatrix} O \\ \widehat{v}_j^{\,*} \end{pmatrix} \left(\widehat{u}_j\widehat{v}_j^{\,*} - \widehat{v}_j\widehat{u}_j^{\,*} \right)^{-1} (O, \\ &\quad - \left(\widehat{u}_j\widehat{v}_j^{\,*} - \widehat{v}_j\widehat{u}_j^{\,*} \right) \widehat{v}_j^{\,*-1}) \\ &\quad = I + \frac{(\bar{z}_j - z_j)z}{|z_j|^2(1 - \bar{z}_j^{-1}z)} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} O \\ I \end{pmatrix} (O,\ -I) = \begin{pmatrix} I & O \\ O & \left(1 - \frac{(\bar{z}_j - z_j)z}{|z_j|^2(1 - \bar{z}_j^{-1}z)} \right) I \end{pmatrix} \\ &\quad = \begin{pmatrix} I & O \\ O & \left(\frac{\bar{z}_j}{z_j} \cdot \frac{z_j - z}{\bar{z}_j - z} \right) I \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда следует формула (2.16) и тот факт, что

$$T^{-1}\mathscr{P}_jT = \begin{pmatrix} O & O \\ O & -I \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

4) Непосредственными вычислениями с использованием (2.15) получаем равенство (2.17).

5) Формула (2.18) немедленно следует из (2.19).

Теорема 5 доказана.

§ 3. Нормированные множители Бляшке-Потапова

Матрица $\mathscr{V}$ называется $\mathcal{J}$-растягивающей (соотв. $\mathcal{J}$-унитарной), если выполнено неравенство $\mathscr{V}\mathcal{J}\mathscr{V}^*-\mathcal{J}\geqslant O$ (соотв. равенство $\mathscr{V}\mathcal{J}\mathscr{V}^*-\mathcal{J}=O$). Известно (см., например, [8]), что если матрица $\mathscr{V}$ является $\mathcal{J}$-растягивающей (соотв. $\mathcal{J}$-унитарной), то и матрица $\mathscr{V}^*$ является $\mathcal{J}$-растягивающей (соотв. $\mathcal{J}$-унитарной). Очевидно, что $\mathcal{J}$-унитарные матрицы невырождены и из $\mathcal{J}$-унитарности матрицы $\mathscr{V}$ следует $\mathcal{J}$-унитарность матрицы $\mathscr{V}^{-1}$.

Теорема 6. *Пусть дан множитель Бляшке-Потапова $b_j(z)$ (см. (2.13)) и произвольная $\mathcal{J}$-унитарная матрица $\mathscr{V}$. Тогда*

1)МФ

$$b'_j(z)=\mathscr{V}b_j(z)\mathscr{V}^{-1} \tag{3.1}$$

является множителем Бляшке-Потапова вида

$$b'_j(z)=I+\frac{(\bar z_j-z_j)z}{|z_j|^2(1-\bar z_j^{-1}z)}\mathcal{P}'_j, \tag{3.2}$$

где

$$\mathcal{P}'_j=\mathscr{V}\mathcal{P}_j\mathscr{V}^{-1}; \tag{3.3}$$

2) Матрица $\mathcal{P}'_j$ допускает представление

$$\mathcal{P}'_j=\begin{pmatrix}\widehat v'^*_j\\ \widehat u'^*_j\end{pmatrix}\left(\frac{\widehat u'_j\widehat v'^*_j-\widehat v'_j\widehat u'^*_j}{i}\right)^{-1}(\widehat v'_j,\ \widehat u'_j)\mathcal{J}, \tag{3.4}$$

где модифицированные параметры Шура $\widehat v'_j$, $\widehat u'_j$ задаются формулами

$$(\widehat v'_j,\ \widehat u'_j)=(\widehat v_j,\ \widehat u_j)\mathscr{V}^*; \tag{3.5}$$

3) выполнены равенства

$$\mathcal{P}'^2_j=-\mathcal{P}'_j,\quad \mathcal{P}'_j\mathcal{J}\geqslant O,\quad \operatorname{tr}\mathcal{P}'_j=-m; \tag{3.6}$$

4) имеют место формулы

$$\det b'_j(z)=\left(\frac{\bar z_j}{z_j}\frac{z_j-z}{\bar z_j-z}\right)^m,\ \mathcal{J}-b'_j(z)\mathcal{J}b'^*_j(z)=\left(\left|\frac{z-z_j}{z-\bar z_j}\right|^2-1\right)\mathcal{P}'_j\mathcal{J}. \tag{3.7}$$

Доказательство. 1) Формулы (3.2), (3.3) немедленно следуют из (3.1) и (2.13).

2) Сначала докажем равенство

$$\frac{\widehat{u}'_j\widehat{v}'^*_j-\widehat{v}'_j\widehat{u}'^*_j}{2i}=\frac{\widehat{u}_j\widehat{v}^*_j-\widehat{v}_j\widehat{u}^*_j}{2i}. \tag{3.8}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\frac{\widehat{u}'_j\widehat{v}'^*_j-\widehat{v}'_j\widehat{u}'^*_j}{2i}&=-\frac{1}{2}(\widehat{v}'_j,\ \widehat{u}'_j)\mathcal{J}\begin{pmatrix}\widehat{v}'^*_j\\ \widehat{u}'^*_j\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}(\widehat{v}_j,\ \widehat{u}_j)\mathscr{V}^*\mathcal{J}\mathscr{V}\begin{pmatrix}\widehat{v}^*_j\\ \widehat{u}^*_j\end{pmatrix}\\&=-\frac{1}{2}(\widehat{v}_j,\ \widehat{u}_j)\mathcal{J}\begin{pmatrix}\widehat{v}^*_j\\ \widehat{u}^*_j\end{pmatrix}=\frac{\widehat{u}_j\widehat{v}^*_j-\widehat{v}_j\widehat{u}^*_j}{2i}.\end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{P}'_j&=\mathscr{V}\mathcal{P}_j\mathscr{V}^{-1}=\mathscr{V}\begin{pmatrix}\widehat{v}^*_j\\ \widehat{u}^*_j\end{pmatrix}\left(\frac{\widehat{u}_j\widehat{v}^*_j-\widehat{v}_j\widehat{u}^*_j}{i}\right)^{-1}(\widehat{v}_j,\ \widehat{u}_j)\mathscr{V}^*\mathcal{J}\\&=\begin{pmatrix}\widehat{v}'^*_j\\ \widehat{u}'^*_j\end{pmatrix}\left(\frac{\widehat{u}'_j\widehat{v}'^*_j-\widehat{v}'_j\widehat{u}'^*_j}{i}\right)^{-1}(\widehat{v}'_j,\ \widehat{u}'_j)\mathcal{J}.\end{aligned}$$

Здесь второе равенство следует из справедливого для $\mathcal{J}$-унитарных матриц соотношения $\mathscr{V}^*\mathcal{J}=\mathcal{J}\mathscr{V}^{-1}$ и определения матрицы $\mathcal{P}_j$, а последнее из – (3.5) и (3.8).

3) Воспользовавшись (3.3), (2.15), (2.18), получим

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}'^2_j=\mathscr{V}\mathcal{P}_j\mathscr{V}^{-1}\mathscr{V}\mathcal{P}_j\mathscr{V}^{-1}=\mathscr{V}\mathcal{P}_j\mathcal{P}_j\mathscr{V}^{-1}=-\mathscr{V}\mathcal{P}_j\mathscr{V}^{-1}=-\mathcal{P}'_j,\\&\mathcal{P}'_j\mathcal{J}=\mathscr{V}\mathcal{P}_j\mathscr{V}^{-1}\mathcal{J}=\mathscr{V}\mathcal{P}_j\mathcal{J}\mathscr{V}^*\geqslant O,\\&\operatorname{tr}\mathcal{P}'_j=\operatorname{tr}(\mathscr{V}\mathcal{P}_j\mathscr{V}^{-1})=\operatorname{tr}\mathcal{P}_j=-m.\end{aligned}$$

4) Воспользовавшись (3.1) и (2.16), получим

$$\det b'_j(z)=\det\Big(\mathscr{V}b_j(z)\mathscr{V}^{-1}\Big)=\det b_j(z)=\left(\frac{\bar{z}_j}{z_j}\frac{z_j-z}{\bar{z}_j-z}\right)^m.$$

Первое из равенств (3.7) доказано. Второе равенство в (3.7) доказываются аналогичным образом.

Теорема 6 доказана.

Теорема 7. *Зафиксируем некоторую точку из верхней полуплоскости, не совпадающую с узлами интерполяции* $z_0\in\mathbb{C}_+\setminus\{z_1,z_2,\dots,z_n,\dots\}$. *Тогда для множителей Бляшке-Потапова* (2.13) *имеют место* $\mathcal{J}$*-полярные представления (см.* [8]*)*

$$b_j(z_0)=\exp(\alpha_j\mathcal{P}_j)\cdot\mathscr{U}_j,\quad j\geqslant 1. \tag{3.9}$$

Здесь

$$\alpha_j = -\ln\left|\frac{z_0 - z_j}{z_0 - \bar z_j}\right| > 0, \quad \mathcal{J} - \mathscr{U}_j \mathcal{J} \mathscr{U}_j^* = O. \tag{3.10}$$

Для множителей Бляшке-Потапова (3.1) $b_j'(z) = \mathscr{V} b_j(z) \mathscr{V}^{-1}$ *имеют место аналогичные* $\mathcal{J}$*-полярные представления*

$$b_j'(z_0) = \exp(\alpha_j \mathcal{P}_j') \cdot \mathscr{U}_j', \quad \mathcal{J} - \mathscr{U}_j' \mathcal{J} \mathscr{U}_j'^* = O, \quad j \geqslant 1. \tag{3.11}$$

Матрицы $\mathcal{P}_j'$ *выражаются по формулам* (3.4) *через модифицированные параметры Шура* $(\widehat{v}\,'_j,\ \widehat{u}\,'_j) = (\widehat{v}_j,\ \widehat{u}_j)\mathscr{V}^*$ *(см.* (3.5)*).*

Доказательство. Воспользуемся элементарным неравенством

$$\left|\frac{z_0 - z_j}{z_0 - \bar z_j}\right|^2 - 1 < 0, \quad z_0, z_j \in \mathbb{C}_+.$$

Отсюда, из (2.15) и (2.17) следует неравенство

$$\mathcal{J} - b_j(z_0) \mathcal{J} b_j^*(z_0) \leqslant O. \tag{3.12}$$

Из неравенства $0 < \left|\frac{z_0 - z_j}{z_0 - \bar z_j}\right|^2 < 1$ и из (3.10) следует, что $\alpha_j > 0$. Отсюда и из (2.15) имеем

$$\alpha_j \mathcal{P}_j \mathcal{J} \geqslant O. \tag{3.13}$$

Имеет место равенство

$$b_j(z_0) \mathcal{J} b_j^*(z_0) \mathcal{J} = (\exp(\alpha_j \mathcal{P}_j))^2. \tag{3.14}$$

Действительно, воспользовавшись (2.17), получим

$$b_j(z_0) \mathcal{J} b_j^*(z_0) \mathcal{J} = (b_j(z_0) \mathcal{J} b_j^*(z_0) - \mathcal{J}) \mathcal{J} + I = \left(1 - \left|\frac{z_0 - z_j}{z_0 - \bar z_j}\right|^2\right) \mathcal{P}_j + I.$$

Из (2.15) следует, что $\mathcal{P}_j^k = (-1)^{k+1} \mathcal{P}_j,\ k > 0$. Поэтому

$$\begin{aligned}
(\exp(\alpha_j \mathcal{P}_j))^2 = \exp(2\alpha_j \mathcal{P}_j) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\alpha_j \mathcal{P}_j)^k}{k!} = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\alpha_j)^k (-1)^{k+1}}{k!} \mathcal{P}_j \\
&= I - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2\alpha_j)^k}{k!} \mathcal{P}_j = I + \Big(1 - \exp(-2\alpha_j)\Big) \mathcal{P}_j \\
&= I + \left(1 - \exp\ln\left|\frac{z_0 - z_j}{z_0 - \bar z_j}\right|^2\right) \mathcal{P}_j = I + \left(1 - \left|\frac{z_0 - z_j}{z_0 - \bar z_j}\right|^2\right) \mathcal{P}_j.
\end{aligned}$$

Из двух последних равенств следует (3.14). Соотношения (3.12)-(3.14) показывают, что формула (3.9) задает $\mathcal{J}$-полярное представление матрицы $b_j(z_0)$ (см. [8]). $\mathcal{J}$-полярное представление (3.11) доказывается аналогичным образом.

Теорема 7 доказана.

Теорема 8. *Пусть дана задача Неванлинны-Пика (1.1) такая, что все усеченные задачи (1.2) являются вполне неопределенными и зафиксирована некоторая точка $z_0 \in \mathbb{C}_+ \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$. И пусть (см. теорему 4) резольвентная матрица $U_n(z)$ представлена в виде произведения множителей Бляшке-Потапова*

$$U_n(z) = \prod_{j=1}^{\overrightarrow{n}} b_j(z)$$

$$= \prod_{j=1}^{\overrightarrow{n}} \left(I + \frac{(\bar{z}_j - z_j)z}{|z_j|^2(1 - \bar{z}_j^{-1} z)} \underbrace{\begin{pmatrix} \widehat{v}_j^{\,*} \\ \widehat{u}_j^{\,*} \end{pmatrix} \left(\frac{\widehat{u}_j \widehat{v}_j^{\,*} - \widehat{v}_j \widehat{u}_j^{\,*}}{i} \right)^{-1} (\widehat{v}_j, \ \widehat{u}_j) \mathcal{J}}_{\mathcal{P}_j} \right), \tag{3.15}$$

где параметры Шура $(\widehat{v}_j, \ \widehat{u}_j)_{j=1}^{\infty}$ определены формулами (2.5) и (2.10).

Тогда существует бесконечная последовательность $\mathcal{J}$-унитарных матриц

$$\mathscr{U}_1, \mathscr{U}_2, \mathscr{U}_3, \dots, \mathscr{U}_n, \dots$$

такая, что

$$U_n(z) = \mathfrak{b}_1(z)\mathfrak{b}_2(z)\mathfrak{b}_3(z)\dots\mathfrak{b}_n(z)\mathscr{U}_n\dots\mathscr{U}_3\mathscr{U}_2\mathscr{U}_1, \quad n \geqslant 1. \tag{3.16}$$

Множители Бляшке-Потапова $\mathfrak{b}_j(z)$ из (3.16) связаны с множителями $b_j(z)$ из (3.15) соотношениями

$$\mathfrak{b}_1(z) = b_1(z)\mathscr{U}_1^{-1}, \quad \mathfrak{b}_j(z) = (\mathscr{U}_{j-1}\dots\mathscr{U}_1)\, b_j(z)\, (\mathscr{U}_{j-1}\dots\mathscr{U}_1)^{-1}\, \mathscr{U}_j^{-1}.$$

В точке z_0 множители $\mathfrak{b}_j(z)$ нормированы к $\mathcal{J}$-модулю

$$\mathfrak{b}_j(z_0) = \exp(\alpha_j \mathcal{P}_j'), \quad j \geqslant 1, \tag{3.17}$$

где

$$\alpha_j = -\ln\left|\frac{z_0 - z_j}{z_0 - \bar{z}_j}\right|, \quad \mathcal{P}_j' = \begin{pmatrix} \widehat{v}_j^{\,\prime *} \\ \widehat{u}_j^{\,\prime *} \end{pmatrix} \left(\frac{\widehat{u}_j' \widehat{v}_j^{\,\prime *} - \widehat{v}_j' \widehat{u}_j^{\,\prime *}}{i} \right)^{-1} (\widehat{v}_j', \ \widehat{u}_j') \mathcal{J} \tag{3.18}$$

и модифицированные параметры Шура имеют вид

$$(\widehat{v}_1', \ \widehat{u}_1') = (\widehat{v}_1, \ \widehat{u}_1), \quad (\widehat{v}_j', \ \widehat{u}_j') = (\widehat{v}_j, \ \widehat{u}_j)\mathscr{U}_1^* \dots \mathscr{U}_{j-1}^*. \tag{3.19}$$

Доказательство. Применим метод математической индукции. При $n = 1$ резольвентная матрица $U_1(z) = b_1(z)$. Рассмотрим $\mathcal{J}$-полярное представление матрицы $b_1(z_0) = \exp(\alpha_1 \mathcal{P}_1) \cdot \mathscr{U}_1$ и положим $\mathfrak{b}_1(z) = b_1(z)\mathscr{U}_1^{-1}$. Теперь резольвентную матрицу запишем в виде $U_1(z) = \mathfrak{b}_1(z)\mathscr{U}_1$. Отметим, что $\mathfrak{b}_1(z_0) = \exp(\alpha_1 \mathcal{P}_1)$ и теорема доказана при $n = 1$.

Пусть формула (3.16) доказана для некоторого $n \geqslant 1$. Отсюда и из теоремы 4 имеем

$$U_{n+1}(z) = U_n(z) b_{n+1}(z) = \overrightarrow{\prod_{j=1}^{n}} \mathfrak{b}_j(z) \cdot$$

$$\left(\overleftarrow{\prod_{j=1}^{n}} \mathscr{U}_j \right) b_{n+1}(z) \left(\overleftarrow{\prod_{j=1}^{n}} \mathscr{U}_j \right)^{-1} \cdot \overleftarrow{\prod_{j=1}^{n}} \mathscr{U}_j. \tag{3.20}$$

Рассмотрим множитель Бляшке-Потапова

$$\begin{aligned} b'_{n+1}(z) = & \left(\overleftarrow{\prod_{j=1}^{n}} \mathscr{U}_j \right) b_{n+1}(z) \left(\overleftarrow{\prod_{j=1}^{n}} \mathscr{U}_j \right)^{-1} \\ = & I + \frac{(\bar{z}_{n+1} - z_{n+1}) z}{|z_{n+1}|^2 (1 - \bar{z}_{n+1}^{-1} z)} \left(\overleftarrow{\prod_{j=1}^{n}} \mathscr{U}_j \right) \mathcal{P}_{n+1} \left(\overleftarrow{\prod_{j=1}^{n}} \mathscr{U}_j \right)^{-1}, \end{aligned}$$

который можно записать в виде

$$b'_{n+1}(z) = I + \frac{(\bar{z}_{n+1} - z_{n+1}) z}{|z_{n+1}|^2 (1 - \bar{z}_{n+1}^{-1} z)} \mathcal{P}'_{n+1}.$$

Здесь матрица

$$\mathcal{P}'_{n+1} = \left(\overleftarrow{\prod_{j=1}^{n}} \mathscr{U}_j \right) \cdot \mathcal{P}_{n+1} \cdot \left(\overleftarrow{\prod_{j=1}^{n}} \mathscr{U}_j \right)^{-1}$$

с помощью модифицированных параметров Шура

$$(\widehat{v}'_{n+1},\ \widehat{u}'_{n+1}) = (\widehat{v}_{n+1},\ \widehat{u}_{n+1}) \left(\overleftarrow{\prod_{j=1}^{n}} \mathscr{U}_j \right)^{*}$$

записывается в виде (см. (3.4))

$$\mathcal{P}'_{n+1} = \begin{pmatrix} \widehat{v}'^{*}_{n+1} \\ \widehat{u}'^{*}_{n+1} \end{pmatrix} \left(\frac{\widehat{u}'_{n+1}\widehat{v}'^{*}_{n+1} - \widehat{v}'_{n+1}\widehat{u}'^{*}_{n+1}}{i} \right)^{-1} (\widehat{v}'_{n+1},\ \widehat{u}'_{n+1})\mathcal{J}.$$

Рассмотрим $\mathcal{J}$-полярное представление (3.11) матрицы $b'_{n+1}(z_0)$

$$b'_{n+1}(z_0) = \exp(\alpha_{n+1}\mathcal{P}'_{n+1}) \cdot \mathscr{U}_{n+1}$$

и нормированный множитель Бляшке-Потапова

$$\mathfrak{b}_{n+1}(z) = b'_{n+1}(z)\mathscr{U}^{-1}_{n+1}.$$

Теперь (3.20) можно записать в виде

$$U_{n+1}(z) = \prod_{j=1}^{\overrightarrow{n+1}} \mathfrak{b}_j(z) \prod_{j=1}^{\overleftarrow{n+1}} \mathscr{U}_j$$

По построению множитель $\mathfrak{b}_{n+1}(z)$ в точке z_0 нормирован к $\mathcal{J}$-модулю

$$\mathfrak{b}_{n+1}(z_0) = \exp(\alpha_{n+1}\mathcal{P}'_{n+1}).$$

Теорема 8 доказана.

Таким образом, резольвентная матрица (1.5) допускает мультипликативное представление

$$U_n(z) = \mathfrak{b}_1(z) \cdot \mathfrak{b}_2(z) \cdot \ldots \cdot \mathfrak{b}_n(z)\mathscr{V}_n. \tag{3.21}$$

Здесь матрицы

$$\mathscr{V}_n = \mathscr{U}_n \ldots \mathscr{U}_1$$

являются $\mathcal{J}$-унитарными.

Основной конструкцией при работе с резольвентными матрицами является конструкция вида $U_n(z)\mathcal{J}U_n^*(z)$. Поэтому резольвентная матрица определена с точностью до умножения справа на произвольную $\mathcal{J}$-унитарную матрицу. Теперь из (3.21) следует, что произведение Бляшке-Потапова нормированных множителей

$$\mathfrak{U}_n(z) = \mathfrak{b}_1(z) \cdot \mathfrak{b}_2(z) \cdot \ldots \cdot \mathfrak{b}_n(z) \tag{3.22}$$

является резольвентной матрицей, которую мы будем называть нормированной резольвентной матрицей. Из (3.21) и (3.22) имеем

$$U_n(z) = \mathfrak{U}_n(z)\mathscr{V}_n, \qquad \mathcal{J} - \mathscr{V}_n\mathcal{J}\mathscr{V}_n^* = O. \tag{3.23}$$

§ 4. Критерий вполне неопределенности задачи Неванлинны - Пика

Из определения резольвентной матрицы (1.5) и основного тождества (1.4) следует (см. [9]-[10]), что

$$\mathcal{J} - U_n(z)\mathcal{J}U_n^*(\lambda) = i(z-\overline{\lambda})\begin{pmatrix} v_n^* \\ u_n^* \end{pmatrix} R_{T_n^*}(z)K_n^{-1}R_{T_n^*}^*(\lambda)(v_n \ u_n). \quad (4.1)$$

Подставим в это равенство $\bar{z}$ вместо λ. Получим $\mathcal{J} - U_n(z)\mathcal{J}U_n^*(\bar{z}) = O$. Отсюда немедленно следует обратимость $U_n(z)$ и равенство

$$U_n^{-1}(z) = \mathcal{J}U_n^*(\overline{z})\mathcal{J}. \quad (4.2)$$

Подставим в (4.1) $\bar{z}$ вместо z и λ и умножим (4.1) слева и справа на $\mathcal{J}$. Воспользовавшись (4.2) и очевидным равенством $R_{T_n^*}^*(\bar{z}) = R_{T_n}(z)$, получим

$$\mathcal{J} - U_n^{-1*}(z)\mathcal{J}U_n^{-1}(z) = i(\overline{z}-z)\mathcal{J}\begin{pmatrix} v_n^* \\ u_n^* \end{pmatrix} R_{T_n}^*(z)K_n^{-1}R_{T_n}(z)(v_n \ u_n)\mathcal{J}.$$

Прямыми вычислениями с использованием (4.1) и (1.7) убеждаемся с том, что

$$U_n(z)\mathcal{J}U_n^*(z) = \begin{pmatrix} I & O \\ c_n(z) & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho_n^{-2}(z) & O \\ O & -r_n^2(z) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & c_n^*(z) \\ O & I \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Или, переходя к обратным матрицам,

$$U_n^{-1*}(z)\mathcal{J}U_n^{-1}(z) = \begin{pmatrix} I & -c_n^*(z) \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho_n^2(z) & O \\ O & -r_n^{-2}(z) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & O \\ -c_n(z) & I \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Теорема 9. *Пусть задача Неванлинны-Пика (1.1) является вполне неопределенной и точка $z_0 \in \mathbb{C}_+ \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots\}$. Тогда сходится произведение*

$$\prod_{j=1}^{\infty}\left|\frac{z_0-z_j}{z_0-\bar{z}_j}\right|^2 \quad (4.5)$$

и сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(z_j-\bar{z}_j)(z_0-\bar{z}_0)}{|z_0-\bar{z}_j|^2}. \quad (4.6)$$

Доказательство. В силу (2.11) и (2.16)

$$\det U_n(z_0) = \prod_{j=i}^{n} \left(\frac{\bar{z}_j}{z_j} \cdot \frac{z_0 - z_j}{z_0 - \bar{z}_j} \right)^m .$$

Поэтому из (4.3) и очевидного равенства $\det \mathcal{J} = (-1)^m$ имеем

$$(-1)^m \cdot \left(\prod_{j=i}^{n} \left| \frac{z_0 - z_j}{z_0 - \bar{z}_j} \right|^2 \right)^m = (-1)^m \big(\det r_n(z_0)\big)^2 \cdot \big(\det \rho_n(z_0)\big)^{-2} \quad (4.7)$$

Задача (1.1) вполне неопределена, т.е. $\det r_\infty(z_0) \neq 0$ и $\det \rho_\infty(z_0) \neq 0$. Переходя к пределу $n \to \infty$ в равенстве (4.7) получим сходимость произведения (4.5). Теперь сходимость ряда (4.6) следует из очевидного равенства

$$\left| \frac{z_0 - z_j}{z_0 - \bar{z}_j} \right|^2 = 1 + \frac{(z_j - \bar{z}_j)(z_0 - \bar{z}_0)}{|z_0 - \bar{z}_j|^2}. \quad (4.8)$$

Теорема 9 доказана.

Теорема 10. *Пусть дана задача Неванлинны-Пика (1.1) такая, что все усеченные задачи (1.2) являются вполне неопределенными и зафиксирована некоторая точка $z_0 \in \mathbb{C}_+ \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots\}$. И пусть, далее, модифицированные параметры Шура $(\widehat{v}'_j,\ \widehat{u}'_j)_{j=1}^\infty$ определены формулами (3.19).*

Для того, чтобы матричная задача Неванлинны-Пика (1.1) была вполне непределенной, необходимо и достаточно, чтобы сходились ряды

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} z_j}{|z_0 - \bar{z}_j|^2} \cdot \widehat{v}'^*_j \left(\frac{\widehat{u}'_j \widehat{v}'^*_j - \widehat{v}'_j \widehat{u}'^*_j}{i} \right)^{-1} \widehat{v}'_j,$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} z_j}{|z_0 - \bar{z}_j|^2} \cdot \widehat{u}'^*_j \left(\frac{\widehat{u}'_j \widehat{v}'^*_j - \widehat{v}'_j \widehat{u}'^*_j}{i} \right)^{-1} \widehat{u}'_j. \quad (4.9)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть задача (1.1) является вполне неопределенной, т.е. $r_\infty(z_0) > O$ и $\rho_\infty(z_0) > O$. Из (3.23) следует, что (4.3) и (4.4) можно записать в виде

$$\mathfrak{U}_n(z_0)\mathcal{J}\mathfrak{U}_n^*(z_0) = \begin{pmatrix} I & O \\ c_n(z_0) & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_n^{-2}(z_0) & O \\ O & -r_n^2(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & c_n^*(z_0) \\ O & I \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{U}_n^{-1*}(z_0)\mathcal{J}\mathfrak{U}_n^{-1}(z_0) =$$

$$\begin{pmatrix} I & -c_n^*(z_0) \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_n^2(z_0) & O \\ O & -r_n^{-2}(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O \\ -c_n(z_0) & I \end{pmatrix}.$$

При $n \to \infty$ правые части этих равенств стремятся к невырожденным матрицам. Поэтому и левые части стремятся к невырожденным матрицам при $n \to \infty$. Но тогда существуют константы $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ такие, что

$$\|\mathcal{J} - \mathfrak{U}_n(z_0)\mathcal{J}\mathfrak{U}_n^*(z_0)\| < C_1, \quad \|\mathcal{J} - \mathfrak{U}_n^{-1*}(z_0)\mathcal{J}\mathfrak{U}_n^{-1}(z_0)\| < C_2. \tag{4.10}$$

В точке z_0 резольвентная матрица $\mathfrak{U}_n(z_0)$ является произведением $\mathcal{J}$-модулей (см. (3.17), (3.22))

$$\mathfrak{U}_n(z_0) = \exp(\alpha_1 \mathscr{P}'_1) \cdot \exp(\alpha_2 \mathscr{P}'_2) \cdot \ldots \cdot \exp(\alpha_n \mathscr{P}'_n) \tag{4.11}$$

Из (4.10) и (4.11) следует сходимость ряда $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \mathscr{P}'_j$ (см. [8]), который можно записать в виде (см. (3.18) и (4.8))

$$-\sum_{j=0}^{\infty} \ln\Big(1 + \frac{(z_j - \bar{z}_j)(z_0 - \bar{z}_0)}{|z_0 - \bar{z}_j|^2}\Big)\mathscr{P}'_j. \tag{4.12}$$

Ряд (4.6) сходится. Поэтому

$$\lim_{j\to\infty} \frac{(\bar{z}_j - z_j)(\bar{z}_0 - z_0)}{|z_0 - \bar{z}_j|^2} = 0.$$

Отсюда следует, что ряд (4.12) сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$-\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z_j - \bar{z}_j)(z_0 - \bar{z}_0)}{|z_0 - \bar{z}_j|^2}\mathscr{P}'_j$$

или, что тоже самое, сходится ряд

$$4\mathrm{Im}\, z_0 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\, z_j}{|z_0 - \bar{z}_j|^2} \cdot \begin{pmatrix} \widehat{v}'^*_j \\ \widehat{u}'^*_j \end{pmatrix} \left(\frac{\widehat{u}'_j \widehat{v}'^*_j - \widehat{v}'_j \widehat{u}'^*_j}{i}\right)^{-1} (\widehat{v}'_j,\ \widehat{u}'_j)\mathcal{J}.$$

Отсюда немедленно следует (4.9).

Достаточность. Пусть сходятся ряды в (4.9). Тогда сходятся и ряды (см., например, [11])

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\, z_j}{|z_0 - \bar{z}_j|^2} \cdot \widehat{u}'^*_j \left(\frac{\widehat{u}'_j \widehat{v}'^*_j - \widehat{v}'_j \widehat{u}'^*_j}{i}\right)^{-1} \widehat{v}'_j,$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\, z_j}{|z_0 - \bar{z}_j|^2} \cdot \widehat{v}'^*_j \left(\frac{\widehat{u}'_j \widehat{v}'^*_j - \widehat{v}'_j \widehat{u}'^*_j}{i}\right)^{-1} \widehat{u}'_j. \tag{4.13}$$

Из (4.9) и (4.13) следует сходимость ряда

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} z_j}{|z_0 - \bar{z}_j|^2} \cdot \begin{pmatrix} \widehat{v}\,'^*_j \\ \widehat{u}\,'^*_j \end{pmatrix} \left(\frac{\widehat{u}\,'_j \widehat{v}\,'^*_j - \widehat{v}\,'_j \widehat{u}\,'^*_j}{i} \right)^{-1} (\widehat{v}\,'_j,\ \widehat{u}\,'_j)\mathcal{J},$$

члены которого лишь постоянным множителем отличается от членов ряда

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z_j - \bar{z}_j)(z_0 - \bar{z}_0)}{|z_0 - \bar{z}_j|^2} \mathscr{P}'_j. \tag{4.14}$$

Из сходимости ряда (4.14) следует сходимость ряда

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z_j - \bar{z}_j)(z_0 - \bar{z}_0)}{|z_0 - \bar{z}_j|^2} \operatorname{tr} \mathscr{P}'_j$$

и, так как $\operatorname{tr} \mathscr{P}'_j = -m$ (см. (3.6)), то сходится ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z_j - \bar{z}_j)(z_0 - \bar{z}_0)}{|z_0 - \bar{z}_j|^2}.$$

Отсюда немедленно следует, что ряд (4.14) сходится и расходится вместе с рядом

$$-\sum_{j=0}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{(z_j - \bar{z}_j)(z_0 - \bar{z}_0)}{|z_0 - \bar{z}_j|^2} \right) \mathscr{P}'_j,$$

который (см. (4.8) и (3.10)) можно записать в виде $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \mathscr{P}'_j$. Сходимость этого ряда (см. [8]) обеспечивает сходимость к невырожденному пределу бесконечного матричного произведения

$$\overrightarrow{\prod}_{j=0}^{\infty} \exp(\alpha_j \mathscr{P}'_j)$$

, т. е. при $n \to \infty$ к невырожденной матрице сходится последовательность матриц (см. (3.17) и (3.21))

$$\mathfrak{U}_n(z_0) = \exp(\alpha_1 \mathscr{P}'_1) \cdot \exp(\alpha_2 \mathscr{P}'_2) \cdot \ldots \cdot \exp(\alpha_n \mathscr{P}'_n).$$

Поэтому, при $n \to \infty$ к невырожденной матрице сходятся левая часть равенства

$$\mathfrak{U}_n(z_0) \mathcal{J} \mathfrak{U}_n^*(z_0) = \begin{pmatrix} I & O \\ c_n(z_0) & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_n^{-2}(z_0) & O \\ O & -r_n^2(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & c_n^*(z_0) \\ O & I \end{pmatrix}.$$

Отсюда немедленно следует, что $r_\infty(z_0) > O$ и $\rho_\infty(z_0) > O$.

Теорема 10 доказана.

Список литературы

[1] И. В. Ковалишина, В. П. Потапов, "Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны-Пика", *ДАН Арм. ССР*, **59**:1 (1974), 17–22.

[2] И. В. Ковалишина, "Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **47**:3 (1983), 455–497.

[3] Ю. Л. Шмульян, "Оператоные шары", *Теория функций, функ. анализ и их прилож.*, 1968, № 6, 455–497.

[4] V. K. Dubovoj, B. Fritzsche, B. Kirstein, *Matricial version of the classical Schur problem*, **129**, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart-Leipzig, 1992.

[5] С. А. Орлов, "Гнездящиеся матричные круги, аналитически зависящие от параметра, и теоремы об инвариантности рангов радиусов предельных матричных кругов", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **40**:3 (1976), 593–644.

[6] Ю.М. Дюкарев, "Факторизация оператор-функций мультипликативного класса Стилтьеса", *Доклады НАН Украины*, 2000, № 9, 23-26.

[7] Ю.М. Дюкарев, "О неопределенности интерполяционных задач в классе Стилтьеса", *Матем. сб.*, **3**:196 (2005), 61-88.

[8] В.П. Потапов, "Мультипликативная структура J-растягивающих матриц-функций", *Тр. Моск. мат. об-ва*, **4** (1955), 125-236.

[9] Yu. M. Dyukarev, "Integral representations of a pair of nonnegative operators and interpolation problems in the Stieltjes class.", *Oper. Theory Adv. Appl.*, **95** (1997), 165–184.

[10] Ю. М. Дюкарев, "Общая схема решения интерполяционных задач в классе Стилтьеса, основанная на согласованных интегральных представлениях пар неотрицательных операторов. I", *Матем. физ., анал., геом.*, **6**:1/2 (1999), 30-54.

[11] Ю. М. Березанский, *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Наукова думка, Киев, 1965.