Критерий вполне неопределенности матричной задачи Неванлинны-Пика

Ю.М. Дюкарев

Белгородская государственная сельскохозяйственная академия
имени В.Я. Горина

Белгород, 2013

Одной из важных проблем в теории функций является нахождение условий, при которых аналитическая функция неоднозначно определяется по своим значениям на некоторой бесконечной последовательности точек из своей области определения (узлов интерполяции). Классическое необходимое условие неоднозначности состоит в том, что все предельные точки множества узлов интерполяции принадлежат границе области определения аналитической функции. Однако это условие не является достаточным. Необходимые и достаточные условия неединственности зависят от области определения и области значений рассматриваемых аналитических функций. Наиболее изученным является случай, когда областью определения и областью значений аналитических функций является круг (полуплоскость). Для таких функций критерии неединственности решения интерполяционных задач были получены в терминах параметров Стилтьеса, параметров Шура, ортонормированных многочленов, кругов Вейля в классических работах первой половины 20-го века.

Эти исследования были продолжены в работах многих авторов. Особо отметим исследования 70-х годов, выполненные в рамках подхода В.П. Потапова к решению интерполяционных задач для неванлинновских матриц-функций (МФ). Аналогичные результаты для стилтьесовских МФ были получены Ю.М. Дюкаревым и В.Э. Кацнельсоном (80-е годы). В перечисленных исследованиях были рассмотрены конкретные интерполяционные задачи. Общие схемы решения интерполяционных задач, включающие в себя целые классы конкретных интерполяционных задач, были предложены в В.Э. Кацнельсоном, П.М. Юдицким и А.Я. Хейфецем для неванлинновских МФ и Ю.М. Дюкаревым, В.А. Болотниковым – для стилтьесовских МФ (90-е годы). Однако эти общие подходы не включали в себя "пошаговых"объектов типа параметров Стилтьеса, параметров Шура, ортонормированных многочленов, кругов Вейля и соответствующих критериев неопределенности предельных интерполяционных задач.

Абстрактные аналоги "пошаговых"объектов были введены в контексте упорядоченных последовательностей обобщенных интерполяционных задач были предложены Ю.М. Дюкаревым ("нулевые"годы). Однако задача построения эффективных критериев неопределенности шуровского (мультипликативного) и гамбургеровского (аддитивного) типа оставалась открытой.

В этом проекте первоначально предполагалось получить только критерий шуровского (мультипликативного) типа. Но удалось получить оба критерия неопределенности – аддитивного и мультипликативного типа.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

По результатам проекта было подготовлено 2 статьи. В первой статье изложен мультипликативный критерий неопределенности.

Ю.М. Дюкарев, *Критерий вполне неопределенности матричной задачи Неванлинны - Пика*

Журнал "Математические заметки"является ежемесячным журналом Отделения математических наук РАН

Импакт-фактор Math-Net.Ru

за 2012 год: 0.419

Поступила в редакцию: 20.05.2013

Кол-во страниц: 15

Продвижение статьи в редакции

1. Поступление статьи 20.05.2013
2. Рецензирование

Научные ведомости Белгородского университета

Во второй статье изложен аддитивный критерий неопределенности.

Ю.М. Дюкарев, *Ортонормированные матрицы-функции и интерполяционные задачи в классе Неванлинны*

Объем статьи – 12 стр.

Статья будет опубликован в декабре 2013.

Имеется справка, подписанная Главным редактором журнала

Голоморфная МФ $w : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}^{m\times m}$ называется неванлинновской, если

$$\frac{w(z) - w^*(z)}{2\,i} \geq O, \quad \forall z \in \mathbb{C}_+.$$

Класс неванлинновских МФ фиксированного порядка $m \geq 1$ обозначим через $\mathcal{R}_m$. В задаче Неванлинны-Пика по последовательности узлов интерполяции

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots \subset \mathbb{C}_+,\ z_j \neq z_k,\ j \neq k$$

и последовательности интерполируемых значений

$$w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots \subset \mathbb{C}^{m\times m}$$

требуется описать все неванлинновские МФ $w \in \mathcal{R}_m$ такие,что

$$w(z_j) = w_j, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Через $\mathcal{F}_\infty$ обозначим множество всех решений задачи (1).

С задачей Неванлинны-Пика связано бесконечное матричное произведение Бляшке-Потапова

$$U_\infty(z) = \overrightarrow{\prod_{j=1}^{\infty}} \mathfrak{b}_j(z)\mathcal{U}_j.$$

В этом произведении матрицы $\mathcal{U}_j$ являются произвольными матрицами из группы $\mathcal{J}$-унитарных матриц, удовлетворяющих условию

$$\mathcal{U}_j\mathcal{J}\mathcal{U}_j^* - \mathcal{J} = O$$

Здесь $\mathcal{J} = \begin{pmatrix} O_m & -iI_m \\ iI_m & O_m \end{pmatrix}$. Основным вопросом является выбор нормирующих матриц $\mathcal{U}_j$. Традиционным здесь был выбор матриц $\mathcal{U}_j$ так, чтобы матрица $\mathfrak{b}_j(z)\mathcal{U}_j$ была $\mathcal{J}$-модулем. Но таком при таком подходе связь между интерполяционной информацией и соответствующим произведением Бляшке-Потапова была не обозримой.

Мы предлагаем новую нормировку, при которой становится более обозримой связь между интерполяционной задачей и произведением Бляшке-Потапова. Это позволит получить новый критерий вполне неопределенности задачи Неванлинны-Пика.

Theorem

Для того, чтобы матричная задача Неванлинны-Пика была вполне непределенной, необходимо и достаточно, чтобы сходились ряды

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} z_j}{|z_0 - \bar{z}_j|^2} \cdot \widehat{v}_j'^{*} \left(\frac{\widehat{u}_j' \widehat{v}_j'^{*} - \widehat{v}_j' \widehat{u}_j'^{*}}{i} \right)^{-1} \widehat{v}_j',$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} z_j}{|z_0 - \bar{z}_j|^2} \cdot \widehat{u}_j'^{*} \left(\frac{\widehat{u}_j' \widehat{v}_j'^{*} - \widehat{v}_j' \widehat{u}_j'^{*}}{i} \right)^{-1} \widehat{u}_j'. \qquad (2)$$

С задачей Неванлинны-Пика свяжем следующие блочные матрицы

$$T_n = \begin{pmatrix} z_1^{-1}I & & \\ & \ddots & \\ & & z_n^{-1}I \end{pmatrix},$$

$$K_n = T_n^{-1} \begin{pmatrix} \frac{w_1 - w_1^*}{z_1 - \overline{z_1}} & \dots & \frac{w_1 - w_n^*}{z_1 - \overline{z_n}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{w_n - w_1^*}{z_n - \overline{z_1}} & \dots & \frac{w_n - w_n^*}{z_n - \overline{z_n}} \end{pmatrix} T_n^{-1*},$$

$$u_n = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, \; v_n = \begin{pmatrix} I \\ \vdots \\ I \end{pmatrix}, \; R_{T_n}(z) = (I - zT_n)^{-1}.$$

Зафиксируем точку $z_0 \in \mathbb{C}_+ \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$ и рассмотрим множество матриц

$$\mathcal{K}_n(z_0) = \{w(z_0) : w \in \mathcal{F}_n\}. \tag{3}$$

Множество $\mathcal{K}_n(z_0)$ допускает представление вида

$$\mathcal{K}_n(w) = \{c_n(z_0) + r_n(z_0) V \rho_n(z_0) : V^* V \leq I\}. \tag{4}$$

Здесь

$$c_n(z_0) = \left(i(\bar{z}_0 - z_0) v_n^*, R_{T_n}^*(z_0) K_n^{-1} R_{T_n}(z_0) v_n\right)^{-1} \times$$
$$\times \{i(\bar{z}_0 - z_0) u_n^* R_{T_n}^*(z_0) K_n^{-1} v_n - iI\}^*,$$
$$r_n(z_0) = \left(i(\bar{z}_0 - z_0) v_n^* R_{T_n}^*(z_0) K_n^{-1} R_{T_n}(z_0) v_n\right)^{-1/2} > O,$$
$$\rho_n(z_0) = \left(i(\bar{z}_0 - z_0) v_n^* R_{T_n}^*(\bar{z}_0) K_n^{-1} R_{T_n}(\bar{z}_0) v_n\right)^{-1/2} > O. \tag{5}$$

С геометрической точки зрения множество $\mathcal{K}_n(z_0)$ из (4) можно считать матричным кругом с центром в точке $c_n(z_0)$ левым радиусом $r_n(z_0)$ и правым радиусом $\rho_n(z_0)$. Этот круг называется матричным кругом Вейля.

Пусть $\mathcal{K}_\infty(z_0) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n$. Тогда при $n \to \infty$ существуют пределы

$$c_\infty(z_0) = \lim_{n\to\infty} c_n(z_0), \quad \rho_\infty(z_0) = \lim_{n\to\infty} \rho_n(z_0) \geq O,$$

$$r_\infty(z_0) = \lim_{n\to\infty} r_n(z_0) \geq O.$$

Более того,

$$\mathcal{K}_\infty(z_0) = = \{w = c_\infty(z_0) + r_\infty(z_0) V \rho_\infty(z_0) : V^* V \leq I\} \qquad (6)$$

Множество матриц $\mathcal{K}_\infty(z_0)$ называется предельным кругом Вейля в точке z_0. Ранги радиусов предельных кругов Вейля не зависят от выбора точки $z_0 \in \mathbb{C}_+ \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots\}$. Введем обозначение

$$m_+ = \text{rank } r_\infty(z_0), \quad m_- = \text{rank} \rho_\infty(z_0). \qquad (7)$$

Ясно, что $0 \leq m_+, m_- \leq m$.

Задача Неванлинны-Пика (1) называется вполне неопределенной, если

$$m_+ = m_- = m. \tag{8}$$

При $n > 1$ имеют место очевидные равенства

$$K_n = \begin{pmatrix} I & 0 \\ B_n^* K_{n-1}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{n-1} & 0 \\ 0 & \widehat{K}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & K_{n-1}^{-1} B_n \\ 0 & I \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Здесь

$$\widehat{K}_n = C_n - B_n^* K_{n-1}^{-1} B_n > 0 \tag{10}$$

Введем рациональные МФ 1-го рода

$$P_1(z) = K_1^{-1/2} R_{T_1}(z) v_1, \quad P_n(z) = \widehat{K}_n^{-1/2} (-B_n^* K_{n-1}^{-1},\ I) R_{T_n}(z) v_n,$$

и рациональные МФ 2-го рода

$$Q_1(z) = -K_1^{-1/2} R_{T_1}(z) u_1, \quad Q_n(z) = -\widehat{K}_n^{-1/2} (-B_n^* K_{n-1}^{-1},\ I) R_{T_n}(z) u_n.$$

Основным результатом предложенного проекта является следующий критерий вполне неопределенности матричной задачи Неванлинны-Пика.

Для того, чтобы матричная задача Неванлинны-Пика (1) *была вполне непределенной, необходимо и достаточно, чтобы сходились ряды*

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_j^*(0)P_j(0), \qquad \sum_{j=0}^{\infty} Q_j^*(0)Q_j(0). \tag{11}$$

H. Hamburger. Uber eine Erweitung des Stieltjesschen Momentenproblem, Math. Ann., 1920, 81, 235–319